

Параллельные алгоритмы для решения квазилинейного уравнения теплопроводности на гетерогенных вычислительных системах



Петрова В.А.¹, Зуев М.И.², Матвеев М.А.²

¹ Международный университет природы, общества и человека «Дубна»

² Лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований

Для численного решения смешанной задачи для двумерного уравнения теплопроводности используется локально-одномерная схема, которая позволяет свести решение многомерной задачи к цепочке одномерных задач. Разработанные программные модули предназначены для проведения расчетов на гетерогенных вычислительных системах. Параллельные алгоритмы были реализованы с применением технологий CUDA – для проведения расчетов на системах с графическими процессорами NVIDIA, OpenMP – для расчетов на многоядерных вычислительных системах, OpenMP с расширениями – для расчетов на системах с сопроцессорами Intel Xeon Phi.

Локально-одномерная схема для задачи

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} K_1(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_2(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}; \quad u|_{\Gamma} = \mu(x, y, t), \quad t \geq 0,$$

где $u = u(x, y, t)$, Γ – граница области D ,

$\bar{D} = D + \Gamma = \{(x, y) : x_L \leq x \leq x_R, y_L \leq y \leq y_R\}$ – прямоугольная область

Расчеты проводились на равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_y$:

$$\bar{\omega}_{h_x h_y} = \bar{\omega}_{h_x} \times \bar{\omega}_{h_y}, \quad \bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = \overline{0, N_t - 1}\},$$

$$\bar{\omega}_{h_x} = \{x_i = x_L + i h_x, \quad i = \overline{0, N_x - 1}\},$$

$$\bar{\omega}_{h_y} = \{y_i = y_L + i h_y, \quad i = \overline{0, N_y - 1}\}$$

OpenMP-реализация: Оптимизации для сопроцессора Intel® Xeon Phi™

Шаг 1.1: нахождение матричных элементов нижней, верхней и главной диагоналей матриц систем и правых частей систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в направлении x

$$A_{i,m}, C_{i,m}, B_{i,m}, F_{i,m}, \quad i = \overline{1, N_x - 2}, \quad m = \overline{1, N_y - 2}$$

Parallel

Шаг 1.2:

Параллельное решение $(N_y - 2)$ систем с трехдиагональными матрицами:

$$A_{i,m} v_{(1),i-1,m}^{j+1} + C_{i,m} v_{(1),i,m}^{j+1} + B_{i,m} v_{(1),i+1,m}^{j+1} = F_{i,m}, \quad i = \overline{1, N_x - 2}$$

Шаг 2.1: нахождение матричных элементов нижней, верхней и главной диагоналей матриц систем и правых частей СЛАУ в направлении y :

$$\tilde{A}_{i,m}, \tilde{C}_{i,m}, \tilde{B}_{i,m}, \tilde{F}_{i,m}, \quad i = \overline{1, N_x - 2}, \quad m = \overline{1, N_y - 2}$$

Parallel

Шаг 2.2:

Параллельное решение $(N_x - 2)$ СЛАУ с трехдиагональными матрицами:

$$\tilde{A}_{i,m} v_{(2),i,m-1}^{j+1} + \tilde{C}_{i,m} v_{(2),i,m}^{j+1} + \tilde{B}_{i,m} v_{(2),i,m+1}^{j+1} = \tilde{F}_{i,m}, \quad m = \overline{1, N_y - 2}$$

Параллельные алгоритмы реализованы с применением технологий: технологии OpenMP для расчетов на многоядерных вычислительных системах; технологии OpenMP с расширениями для расчетов на системах с сопроцессорами Intel Xeon Phi; технологии CUDA для проведения расчетов на системах с графическими процессорами Nvidia. Для расчетов был предоставлен доступ к гибриднему суперкомпьютеру K-100.

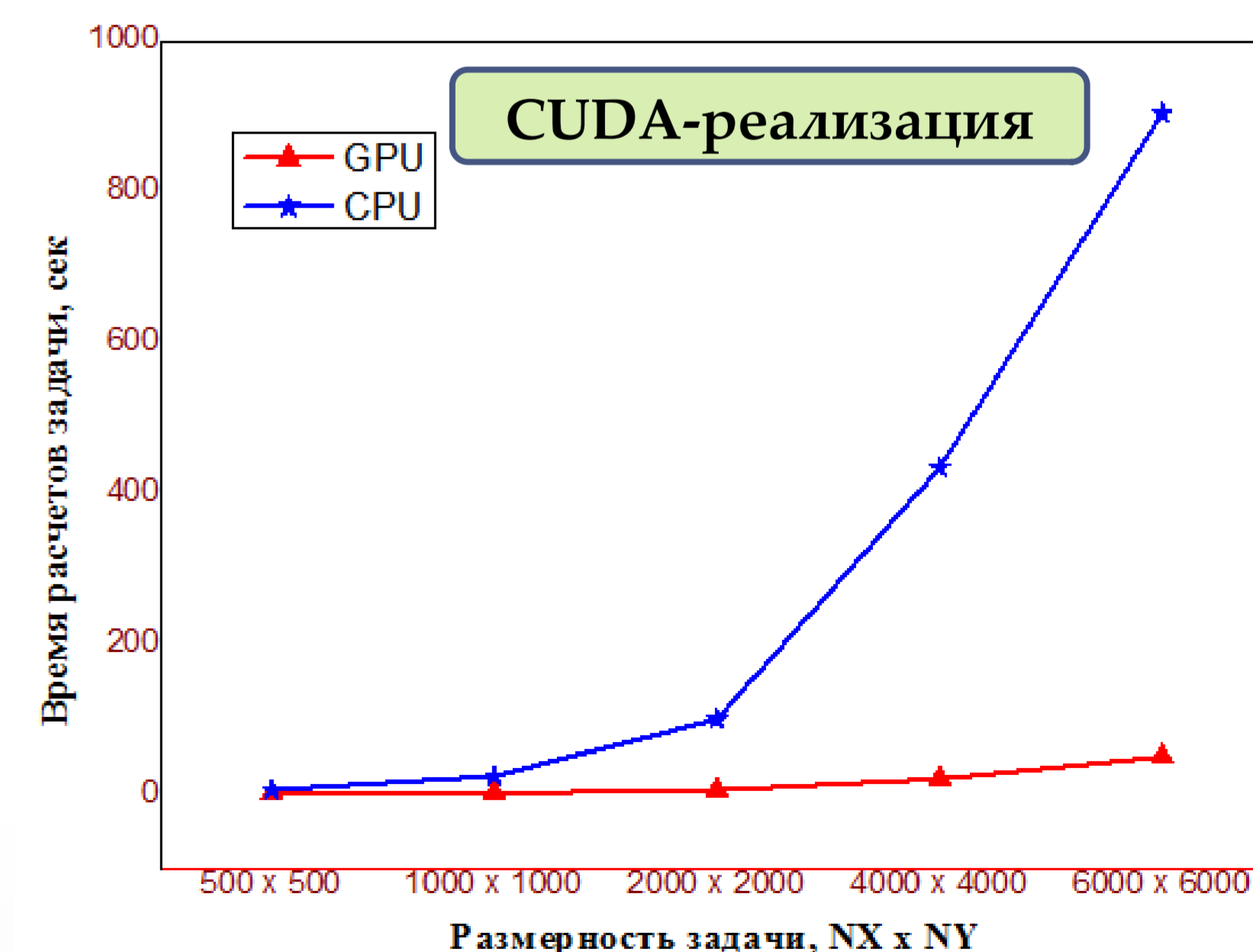
KMP_AFFINITY compact scatter balanced

Execution time (sec) 10.85077 13.24356 10.46549

Реализации параллельного алгоритма для вычислений на различных архитектурах:

OpenMP-реализация: Время вычислений и ускорение расчетов (CPU Xeon X5670)

| Число потоков n, (threads) | Время расчетов [сек.] | Ускорение вычислений |
|----------------------------|-----------------------|----------------------|
| 1 | 84.64439 | 1 |
| 2 | 46.93157 | 1,80357 |
| 4 | 23.46677 | 3,60699 |
| 6 | 17.19202 | 4,92347 |
| 8 | 14.08791 | 6,0083 |
| 10 | 12.47396 | 6,78569 |



Были разработаны вычислительные схемы, параллельные алгоритмы и их программные реализации для проведения расчетов на гибридных вычислительных системах. С целью поэтапной отладки всех программных модулей были численно решены следующие задачи: краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, начально-краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности, смешанная задача для линейного двумерного уравнения теплопроводности.