Параллельные алгоритмы для решения квазилинейного уравнения теплопроводности на гетерогенных вычислительных системах

Петрова В.А.[1], Зуев М.И.[2], Матвеев М.А.[2]

[1] Международный университет природы, общества и человека «Дубна»

[2] Лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований

Для численного решения смешанной задачи для двумерного уравнения теплопроводности используется локально-одномерная схема, которая позволяет свести решение многомерной задачи к цепочке одномерных задач. Разработанные программные модули предназначены для проведения расчетов на гетерогенных вычислительных системах. Параллельные алгоритмы были реализованы с применением технологий CUDA – для проведения расчетов на системах с графическими процессорами NVIDIA, OpenMP – для расчетов на многоядерных вычислительных системах, OpenMP с расширениями – для расчетов на системах с сопроцессорами Intel Xeon Phi.

Локально-одномерная схема для задачи

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x} K_1(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} K_2(x,y,t)\dfrac{\partial u}{\partial y} + f(x,y,t), \ (x,y)\in D, \ t>0; \\ u\big|_{t=0} = u_0(x,y), \ (x,y)\in \bar{D}; \quad u\big|_{\Gamma} = \mu(x,y,t), \ t \ge 0, \end{cases}$$

где $u = u(x,y,t)$, Γ – граница области D,

$\bar{D} = D + \Gamma = \{(x,y): x_L \le x \le x_R, y_L \le x \le y_R\}$ – прямоугольная область

Расчеты проводились на равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_\tau \times \hat{\omega}_{h_x h_y}$:

$$\hat{\omega}_{h_x h_y} = \bar{\omega}_{h_x} \times \bar{\omega}_{h_y}, \bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \ j = \overline{0, N_t - 1}\},$$

$$\bar{\omega}_{h_x} = \{x_{i_1} = x_L + i_1 h_x, \ i_1 = \overline{0, N_x - 1}\},$$

$$\bar{\omega}_{h_y} = \{ y_{i_2} = y_L + i_2 h_y, \ i_2 = \overline{0, N_y - 1}\}$$

Шаг 1.1: нахождение матричных элементов нижней, верхней и главной диагоналей матриц систем и правых частей систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в направлении x

$$A_{i,m}, C_{i,m}, B_{i,m}, F_{i,m}, \quad i = \overline{1, N_x - 2}, \ m = \overline{1, N_y - 2}$$

Parallel

Шаг 1.2:

Параллельное решение $(N_y - 2)$ систем с трехдиагональными матрицами:

$$A_{i,m} v^{j+1}_{(1),i-1,m} + C_{i,m} v^{j+1}_{(1),i,m} + B_{i,m} v^{j+1}_{(1),i+1,m} = F_{i,m}, i = \overline{1, N_x - 2}$$

Шаг 2.1: нахождение матричных элементов нижней, верхней и главной диагоналей матриц систем и правых частей СЛАУ в направлении y:

$$\tilde{A}_{i,m}, \tilde{C}_{i,m}, \tilde{B}_{i,m}, F_{i,m}, \tilde{B}_{i,m}, \quad i = \overline{1, N_x - 2}, \ m = \overline{1, N_y - 2}$$

Parallel

Шаг 2.2:

Параллельное решение $(N_x - 2)$ СЛАУ с трехдиагональными матрицами:

$$\tilde{A}_{i,m} v^{j+1}_{(2),i,m-1} + \tilde{C}_{i,m} v^{j+1}_{(2),i,m} + \tilde{B}_{i,m} v^{j+1}_{(2),i,m+1} = \tilde{F}_{i,m}, m = \overline{1, N_y - 2}$$

Параллельные алгоритмы реализованы с применением технологий: технологии **OpenMP** для расчетов на многоядерных вычислительных системах; технологии **OpenMP** с расширениями для расчетов на системах с сопроцессорами **Intel Xeon Phi**; технологии **CUDA** для проведения расчетов на системах с графическими процессорами **Nvidia**. Для расчетов был предоставлен доступ к гибридному суперкомпьютеру K-100.

OpenMP-реализация: Оптимизации для сопроцессора Intel® Xeon Phi™

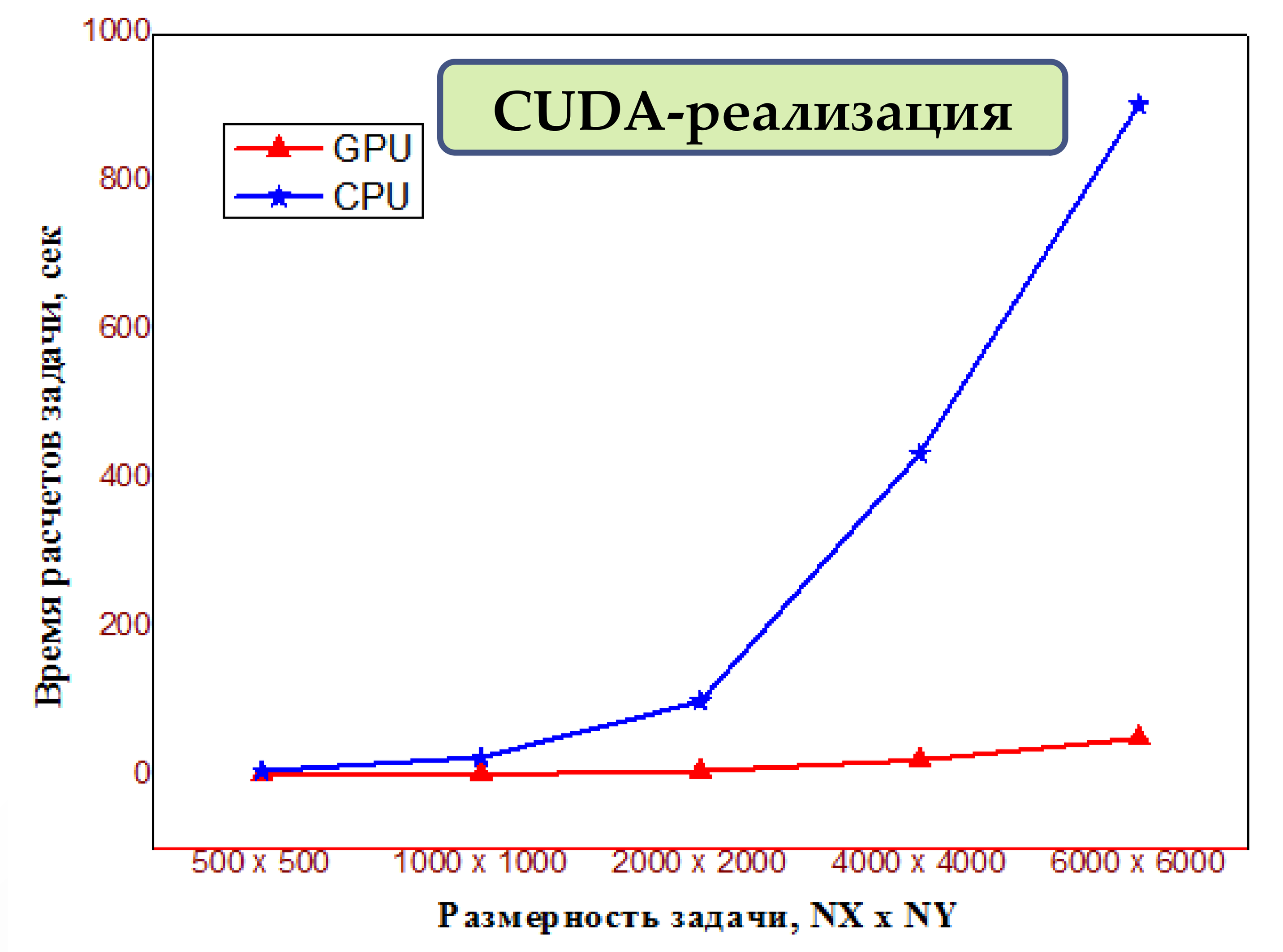
KMP_AFFINITY	compact	scatter	balanced
Execution time (sec)	10.85077	13.24356	10.46549

Реализации параллельного алгоритма для вычислений на различных архитектурах:

OpenMP-реализация: Время вычислений и ускорение расчетов (CPU Xeon X5670)

Число потоков n, (threads)	Время расчетов [сек.]	Ускорение вычислений
1	84.64439	1
2	46.93157	1,80357
4	23.46677	3,60699
6	17.19202	4,92347
8	14.08791	6,0083
10	12.47396	6,78569

CUDA-реализация



Были разработаны вычислительные схемы, параллельные алгоритмы и их программные реализации для проведения расчетов на гибридных вычислительных системах. С целью поэтапной отладки всех программных модулей были численно решены следующие задачи: краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, начально-краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности, смешанная задача для линейного двумерного уравнения теплопроводности.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 14-01-31227 мол_а, ОИЯИ № 14-602-03.